01/03/2018

Το μάθημα θα είναι κάθε Τρίτη $6^{00}-9^{00}$ μμ.

(Στο προηγούμενο μάθημα)

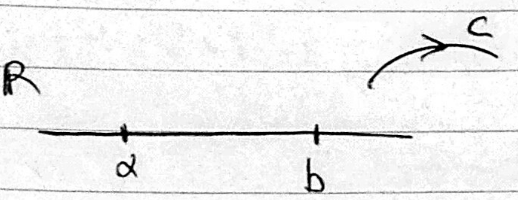
Λήμμα: $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ C^k καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s.

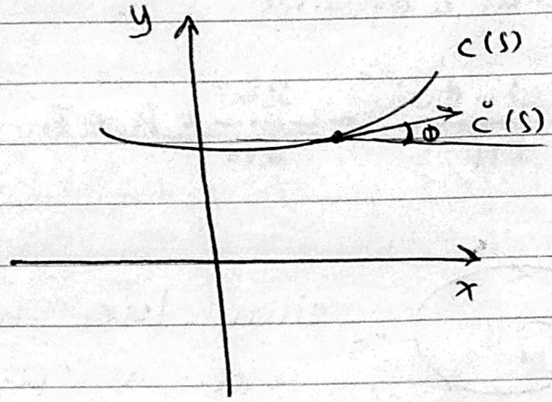
Τότε υπάρχει C^{k-1} συνάρτηση $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$

ώστε $\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$

- Αν $\phi, \tilde{\phi}$ είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις τότε $\exists\, m\in\mathbb{Z}: \tilde{\phi} = \phi + 2m\pi$

$\phi(b)-\phi(a)$ είναι ανεξ. της ϕ.
μεταβολή της γωνίας.

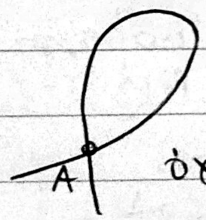




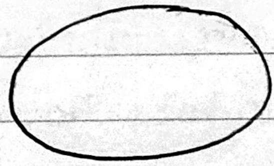
$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

Κλειστή καμπύλη είναι κάθε καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ για την οποία $L>0$
ώστε $c(s+L)=c(s)$, $\dot{c}(s+L)=\dot{c}(s)$



όχι κλειστή καμπύλη
γιατί τα εφαπτόμενα στο σημείο A δεν συμφωνούν



κλειστή καμπύλη.

$\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

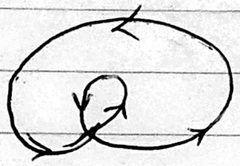
$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))\ \forall s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\phi(s+L) - \phi(s) = 2k\pi \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{Z}\end{array}}$$

$$\int_0 \|\dot{c}(s)\| ds = L$$

<u>Ορισμός</u>: Ο δείκτης περιστροφής μιας κλειστής καμπύλης $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με περίοδο L είναι ο αριθμός

$$n_c = \frac{\phi(L) - \phi(0)}{2\pi} = \frac{2k\pi}{2\pi} = k \in \mathbb{Z}$$

Η καμπύλη  είναι μια κλειστή καμπύλη, αλλά έχει αυτοτομές.

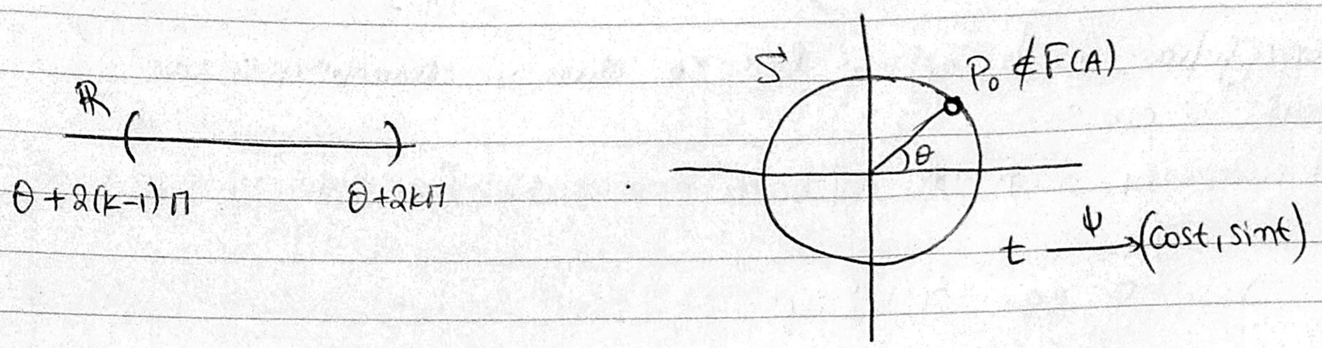
<u>Ορισμός</u>: Μια κλειστή καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με περίοδο $L > 0$ καλείται <u>απλή</u> $\Leftrightarrow$ $c|_{[0,L)}$ 1-1.

<u>Θεώρημα (Στρεφόμενης Εφαπτομένης)</u>: Κάθε απλή κλειστή καμπύλη c έχει δείκτη περιστροφής $n_c = \pm 1$

<u>Λήμμα</u>: Έστω A αστερόσχημο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $F: A \to S^1$ συνεχής απεικόνιση με $F(x) = (u(x), v(x))$, $u^2(x) + v^2(x) = 1$.
Υπάρχει συνεχής $\phi: A \to \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x))$

Επιπλέον, υπάρχει μοναδική τέτοια με $\phi(x_0) = \phi_0$

Ειδική Περίπτωση : Υποθέτω ότι η F ΔΕΝ είναι επί (του κύκλου)



$I = (\theta+2(k-1)\pi, \theta+2k\pi)$

$\psi : I \to S^1 \setminus \{P_0\}$

$\psi(t) = (\cos t, \sin t)$: 1-1 και επί

$\psi^{-1} : S^1\setminus\{P_0\} \to I$ συνεχής.

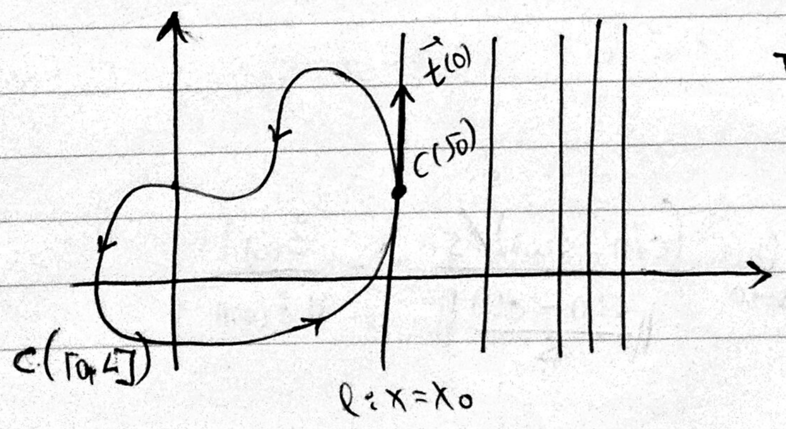
Ορίζω ως $\phi : A \to \mathbb{R}$ την συνάρτηση $\Phi = \psi^{-1}\circ F$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\Phi"'] & S^1\setminus\{P_0\} \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ & I \end{tikzcd}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος Στρεφόμενης Εφαπτομένης:

Έστω $c : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ απλή κλειστή καμπύλη με περίοδο $L>0$

$c(s) = (x(s), y(s))$



Παίρνω μια ευθεία κάθετη στον $x'x$ και την μετακινώ παράλληλα μέχρι να συναντήσει το σημείο της καμπύλης με τη μεγαλύτερη τετμημένη.

Από ανάλυση $\exists\, s_0 \in [0,L]$ ώστε $x_0 = x(s_0) = \max\limits_{[0,L]} x(s)$

Ισχυρίζομαι ότι η ευθεία $l: x = x_0$ είναι η εφαπτόμενη ευθεία της c στο s_0

Η συνάρτηση $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λαμβάνει max στο s_0. Άρα έχω

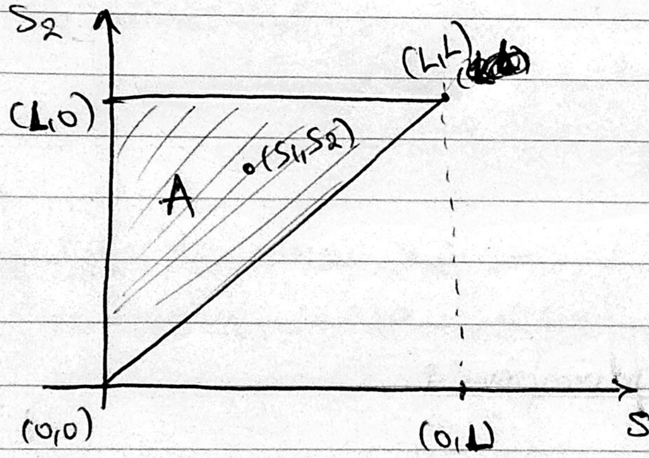
$$\dot{x}(s_0)=0 \quad \text{και} \quad \ddot{x}(s_0)\le 0$$

$$x(s) = \langle c(s), e_1\rangle$$
$$\dot{x}(s) = \langle \dot{c}(s), e_1\rangle$$

Άρα $\dot{c}(s_0) \perp e_1 \Rightarrow$ η $l: x=x_0$ είναι η εφαπτόμενη της c στο s_0

Μπορώ να υποθέσω κάνοντας αναπαραμέτρηση ότι $s_0=0$ και $\vec{t}(0)=\vec{e_2}$

Ορίζουμε την απεικόνιση $F: A\to S^1$ όπου A είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0,L),(L,0),(L,L)$



$$F(s_1,s_2)=\begin{cases} \dfrac{c(s_2)-c(s_1)}{\|c(s_2)-c(s_1)\|}, & s_1<s_2,\ (s_1,s_2)\neq(0,L) \\ \dot{c}(s), & s_1=s_2=s \\ -\dot{c}(0), & (s_1,s_2)=(0,L) \end{cases}$$

Θέλω η συνάρτηση που όρισα να είναι συνεχής.

$$\lim_{s\to 0} F(s,L) \overset{?}{=} F(0,L)$$

$$\lim_{s\to 0} F(s,L) = \lim_{s\to 0}\frac{c(L)-c(s)}{\|c(L)-c(s)\|} = -\lim_{s\to 0}\frac{(c(s)-c(0))/s}{\left\|\frac{c(s)-c(0)}{s}\right\|} = -\frac{\dot{c}(0)}{\|\dot{c}(0)\|}$$

▸ διαιρέσαι με $\|c(s_2)-c(s_1)\|$ ώστε να έχει μήκος 1 και να ανήκει στο S^1.

▸ $\|c(s_2)-c(s_1)\| \neq 0$ γιατί c απλή

▸ όμοια αποδεικνύεται ότι και στα υπόλοιπα σημεία που αλλάζει ο τύπος η F συνεχής

Άρα έχω μια απεικόνιση $F: A \to S^1$ συνεχής και A αστερόσχημο $\overset{\text{λήμμα}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \exists\, \phi: A \to \mathbb{R}$ τ.ω. $F(s_1,s_2) = (\cos\phi(s_1,s_2), \sin\phi(s_1,s_2))$

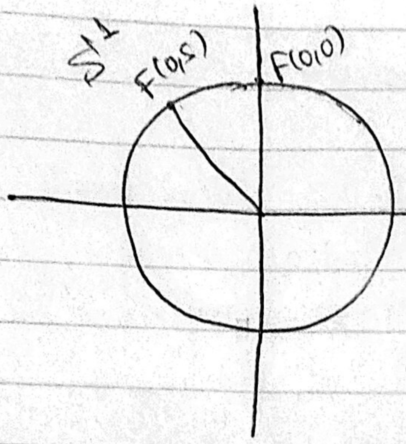
$$\dot{c}(s) = F(s,s) = (\cos\phi(s,s), \sin\phi(s,s))$$

$$n_c = \frac{\phi(L,L)-\phi(0,0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left\{(\phi(L,L)-\phi(0,L)) + (\phi(0,L)+\phi(0,0))\right\}$$

$\phi(0,L)-\phi(0,0)$ είναι η μεταβολή της γωνίας για την $F(0,s)$ $s \in [0,L]$

$$F(0,s) = \begin{cases} \dfrac{c(s)-c(0)}{\|c(s)-c(0)\|}, & 0<s<L \\ \dot{c}(0), & s=0 \\ -\dot{c}(0), & s=L \end{cases}$$

→



$\phi(0,0) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\phi(0,L) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

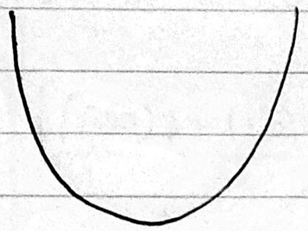
άρα $\phi(0,L) - \phi(0,0) = \pi$

δηλαδή $n_c = \frac{1}{2\pi}\{\pi+\pi\} = 1$.

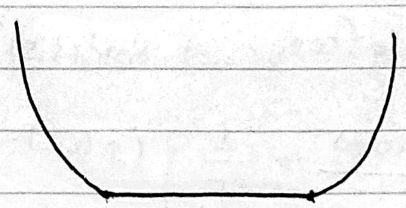
$\phi(L,L) - \phi(0,L)$ είναι η μεταβολή της $F(s,L)$

ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ.

Ορισμός: Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου.
Η c καλείται κυρτή εάν η καμπύλη περιέχεται εξ' ολοκλήρου σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ΚΑΘΕ εφαπτόμενη ευθεία.

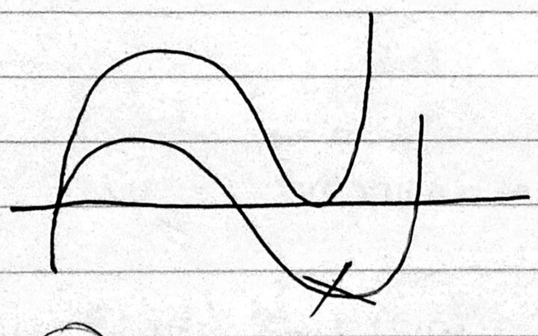


κυρτή καμπύλη

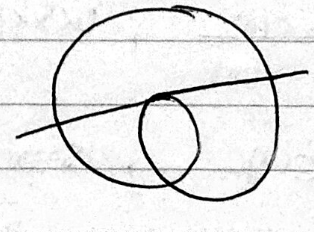


↳ ευθύγραμμο τμήμα.

κυρτή καμπύλη.



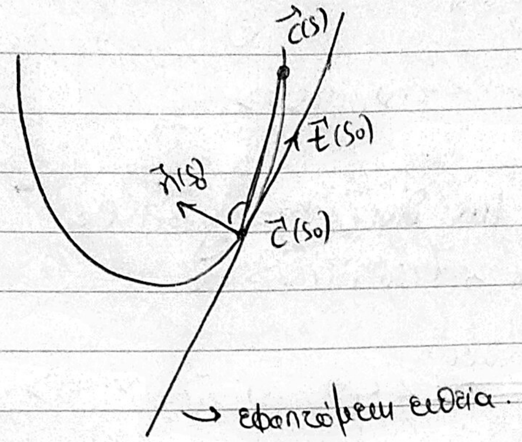
όχι κυρτή καμπύλη.

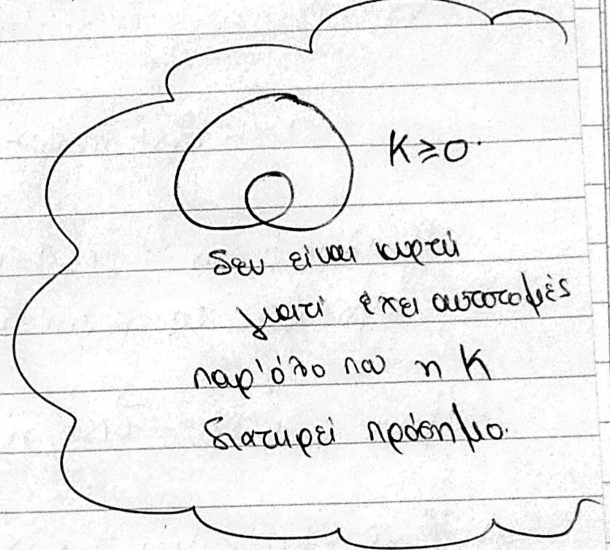


όχι κυρτή καμπύλη.

Θεώρημα: (i) Κάθε κυρτή καμπύλη έχει καμπυλότητα που διατηρεί πρόσημο. (ή παντού μεγαλύτερη-ίση του μηδενός ή παντού μικρότερη-ίση του μηδενός)

(ii) Κάθε απλή κλειστή καμπύλη (όχι αυτοτομές) της οποίας η καμπυλότητα διατηρεί πρόσημο είναι κυρτή





Αναδιατύπωση του ορισμού κυρτότητας:

Η c είναι κυρτή ανν για s_0 ισχύει $\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \geq 0 \ \forall s$ ή $\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \leq 0 \ \forall s$.

Λήμμα: Μια καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου s είναι κυρτή ανν ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(i) $\forall s, s_0 \quad \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \geq 0$

(ii) $\forall s, s_0 \quad \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \leq 0$

Απόδειξη: ~~έστω μια κυρτή καμπ~~

Φτιάχνω δύο σύνολα: $A^+ = \{s_0 \in I \,/\, \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \geq 0 \ \forall s \in I\}$

και $A^- = \{s_0 \in I \,|\, \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \leq 0 \ \forall s \in I\}$

Άρα $A^- \cup A^+ = A$ →

Αν $A^- \cap A^+ = \emptyset$ η απόδειξη έχει τελειώσει

Αν $A^- \cap A^+ \neq \emptyset$ τότε η καμπύλη θα είναι ευθεία άρα πάλι ισχύει

(i) Επειδή η C είναι κυρτή υποθέτω ότι $\forall s_0, s$ ισχύει:

$$\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \geq 0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(s) = \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle$

$\forall s \quad f(s) \geq 0 = f(s_0) \Longrightarrow \underset{①}{\dot{f}(s_0)=0}$ και $\underset{②}{\ddot{f}(s_0) \geq 0}$

$$\dot{f}(s) = \langle \dot{c}(s), \vec{n}(s_0)\rangle \Rightarrow \dot{f}(s) = \langle \vec{t}(s), \vec{n}(s_0)\rangle$$

Η πληροφορία ① $\dot{f}(s_0)=0$ δεν μου δίνει κάτι, γιατί θα προκύψει το προφανές $\dot{f}(s_0) = \langle \vec{t}(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle = 0$

Όμως $\ddot{f}(s) = \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s_0)\rangle \xrightarrow{\text{Frenet}} \langle k(s)\vec{n}(s), \vec{n}(s_0)\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{f}(s) = k(s)\langle \vec{n}(s), \vec{n}(s_0)\rangle \Rightarrow \ddot{f}(s_0) = k(s_0) \xrightarrow{②} k(s_0) \geq 0.$$

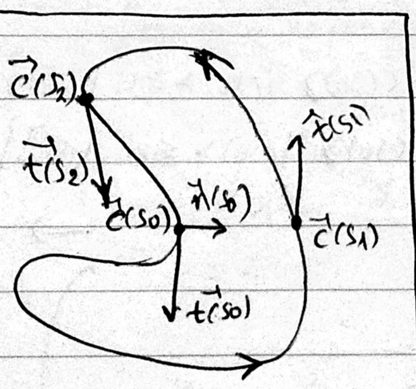
(ii) Έστω c απλή κλειστή καμπύλη μήκους $L>0$ με καμπυλότητα $k(s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Θα δείξω ότι είναι κυρτή
Υποθέτω ότι η καμπύλη δεν είναι κυρτή, τότε για κάποιο $s_0 \in \mathbb{R}$ δεν θα διατηρεί πρόσημο η συνάρτηση:

$$f(s) = \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle$$

s_1, s_2 κρίσιμα σημεία

Δηλαδή υπάρχουν s_1, s_2 ώστε $\boxed{\underset{\min f}{f(s_1)} < 0 = f(s_0) < \underset{\max f}{f(s_2)}}$

άρα και το s_1+L είναι κρίσιμο σημείο



$$\dot{f}(s_1)=0 \iff \langle \vec{t}(s_1), \vec{n}(s_0)\rangle = 0 \Rightarrow \vec{t}(s_1) = \pm\vec{t}(s_0)$$

$$\dot{f}(s_2)=0 \iff \langle \vec{t}(s_2), \vec{n}(s_0)\rangle = 0 \iff \vec{t}(s_2) = \pm\vec{t}(s_0)$$

$$\dot{f}(s_1+L)=0 \iff \langle \vec{t}(s_1+L), \vec{n}(s_0)\rangle = 0 \iff \vec{t}(s_1+L) = \pm\vec{t}(s_0)$$

(Έχω 3 σημεία της καμπύλης που τα εφαπτόμενα είναι παράλληλα. Υπάρχουν από τα s_1, s_2, s_1+L δύο που έχουν ίδιο εφαπτόμενο)

Έστω $t_1, t_2 \in \{s_1, s_2, s_1+L\}$ με $t_1 < t_2$: $\vec{t}(t_1) = \vec{t}(t_2)$

Είναι περιοδική καμπύλη άρα όλα τα μεγέθη της είναι περιοδικά δηλαδή $\vec{t}(t_1) = \vec{t}(t_2) = \vec{t}(t_1+L)$

Γνωρίζω ότι $k = \dot{\phi}$, $\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$

$$k \geq 0 \Rightarrow \phi \nearrow \xrightarrow{①} \phi(t_1) \leq \phi(t_2) \quad \text{και} \quad \vec{t}(t_1) = \vec{t}(t_2) \Rightarrow (\cos\phi_1(t_1), \sin\phi_1(t_1)) = (\cos\phi_2(t_2), \sin\phi_2(t_2))$$

Όταν δύο γωνίες έχουν ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς γνωρίζω ότι:

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \phi(t_2) = \phi(t_1) + 2m\pi \Rightarrow m \geq 0$$

και επίσης $\vec{t}(t_1+L) = \vec{t}(t_1) \Rightarrow \phi(t_1+L) = \phi(t_2) + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

$$\phi(s+L) = \phi(s) + 2\pi n_c \xrightarrow[\substack{\text{εφαπτομένης} \\ n_c = 1}]{\text{θεώρημα Στρεφόμενης}} \left.\begin{array}{l} \phi(s+L) = \phi(s) + 2\pi \quad \forall s \\ \phi(t_1+L) = \phi(t_1) = 2\pi \end{array}\right\} \text{προσθέτω}$$

και έχω $m + l = 1$ με $m \geq 0$, $l \geq 0$. $\Rightarrow m = 0$ ή $l = 0$

Αν $m = 0 \Rightarrow \phi(t_1) = \phi(t_2)$ σημαίνει ότι ϕ σταθερή $\Rightarrow \dot{\phi} = 0 \Rightarrow$
$(t_1 \leq t \leq t_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t) \leq \phi(t_2))$ $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ c ευθεία

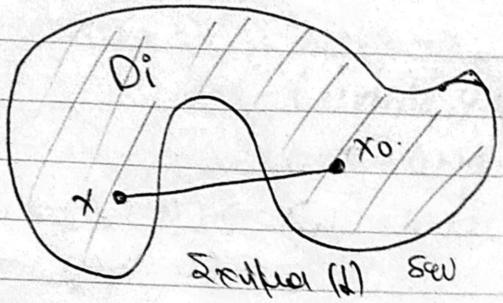
~~...~~ Άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

⊛ Κάθε κλειστή καμπύλη χωρίζει το επίπεδο σε 2 ανοικτά συνεκτικά ημιεπίπεδα

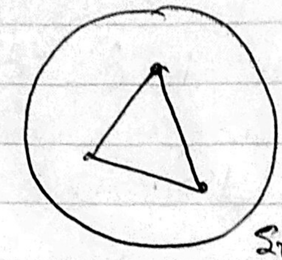
Θεώρημα Jordan: Έστω C απλή κλειστή καμπύλη τότε

$$\mathbb{R}^2 \setminus C(\mathbb{R}) = D_i \cup D_e$$

D_i, D_e ανοικτά συνεκτικά με σύνορο $\partial D_i = \partial D_e = C(\mathbb{R})$ και το ένα ακριβώς από αυτά είναι φραγμένο



Σχήμα (1) δεν είναι κυρτό αφού $xx_0 \notin D_i$



Σχήμα (2) ισχύει η κυρτότητα.

Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα: Από όλες τις απλές κλειστές καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με δεδομένο μήκος L, υπάρχει καμπύλη που το εσωτερικό της έχει μέγιστο εμβαδό;

Απάντηση: ο κύκλος.

Θεώρημα Gauss-Green: P, Q λείες συναρτήσεις

$$\iint_{D_i} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

→ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

(η καμπύλη είναι το κοινό σύνορο)

Θεωρώ τις συναρτήσεις $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$ και $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$

$$\iint_{D_i} 1\,dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

→ αποσκοπώ να αθροίζω στην μονάδα για να μου δώσει το εμβαδό

Υπενθύμιση Επικαμπυλίου Ολοκληρώματος:

$$\oint_C P dx + Q dy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right] dt$$

Άρα $A(Di) = \frac{1}{2}\int_0^L (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt = \frac{1}{2}\int_0^L x(t)y'(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^L y(t)x'(t)dt$

$\overset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \frac{1}{2}\int_0^L x(t)y'(t)dt - \frac{1}{2}\left\{ y(t)x(t)\Big|_0^L - \int_0^L y'(t)x(t)dt \right\}$

Λήμμα: Το εμβαδό $A(Di)$ του εσωτερικού μιας απλής κλειστής καμπύλης $c(t) = (x(t), y(t))$ μήκους $L>0$ είναι

$$A(Di) = \int_0^L x(t)y'(t)dt = -\int_0^L y(t)x'(t)dt.$$

έχω 2 τρόπους ανάλογα ποιά παραγοντική ολοκλήρωση επιλέξω να κάνω

Θα χρησιμοποιήσω το παρακάτω θεώρημα για να απαντήσω στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα:

Θεώρημα: Έστω c απλή κλειστή καμπύλη μήκους L. Αν A είναι το εμβαδό του εσωτερικού της c τότε ισχύει ότι

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A}$$ γνωστή ως Ισοπεριμετρική Ανισότητα.

Η ισότητα $L^2 = 4\pi A$ ισχύει μόνο αν η καμπύλη είναι κύκλος.

Αυτό εφαρμόζεται για την απλή κλειστή επιφάνεια $\Sigma \Delta \Delta$ για καμπύλες του επιπέδου

Επομένως, όλες οι καμπύλες με δεδομένο μήκος L έχουν εμβαδό $\left(A \leq \frac{L^2}{4\pi}\right)$ που φράσσεται από το $\frac{L^2}{4\pi}$.

Άρα για το μέγιστο εμβαδό αρκεί να ελέγξουμε πότε ισχύει η ισότητα.